B. Inst. Pesca
21 (único): 19 - 21, 1994

ALOMETRIA REFERENCIAL

[Referential allometry]

Edison Pereira dos SANTOS [1,2]

RESUMO

Este trabalho apresenta os conceitos de comprimento referencial e alometria referencial e utiliza-os no desenvolvimento das equações de crescimento orgânico.

PALAVRAS-CHAVE: crescimento relativo, curvas de crescimento, morfometria

ABSTRACT

This paper presents the concepts of referential length and referential allometry, and uses them for the development of the organic growth equations.

KEY WORDS: relative growth, growth curves, morphometry

1. INTRODUÇÃO

Diz-se que os indivíduos de uma espécie biológica crescem isometricamente, quando as proporções entre suas medidas morfométricas permanecem constantes. Essas proporções são definidas para cada duas medidas.

Este trabalho desenvolve os conceitos abstratos "comprimento referencial" e "alometria referencial", que:

1) servem de base, em relação ao crescimento orgânico, para essas proporções, e para o estudo da morfometria aplicada à taxonomia, etc.,

2) auxiliam o desenvolvimento das expressões matemáticas para o crescimento orgânico, e a interpretação e estimação dos parâmetros, e

3) permitem estimar os parâmetros metabólicos (IV), sem a interferência da alometria da variável escolhida.

2. METODOLOGIA

Sejam:

L e L' = medidas quaisquer de comprimento e

l = comprimento referencial, tal que:

$$W = \delta\, l^{3} \qquad \text{(I)}$$

onde:

W = peso individual e

δ = densidade física (peso/volume).

Segundo HUXLEY (1972): $L' = \alpha L^{\beta}$, com β medindo o grau de alometria em relação à isometria $\beta = 1$. Este trabalho define:

$$L = \gamma\, l^{\nu} \qquad \text{(II)}$$

como ALOMETRIA REFERENCIAL, com ν medindo o grau de alometria referencial em relação à isometria referencial $\nu = 1$.

De (I) resulta: $W = \phi L^{\theta}$ (III)

$$\text{com: } \phi = \delta\gamma^{-\theta} \text{ e } \theta = \frac{3}{\nu}$$

$$\text{assim: } \beta = \frac{\nu'}{\nu} \quad \text{e } \alpha = \gamma\gamma^{-\beta}$$

A estimativa de ν é feita através da estimativa de θ, que depende da variância sobre a curva e da condição fundamental do ajustamento (observações em igual número, em todo o domínio de L). Essa variância depen-

(1) Bolsista do CNPq junto à Divisão de Pesca Marítima - Instituto de Pesca - CPA/SAA
(2) Endereço/Address: Av. Bartholomeu de Gusmão, 192 - CEP 11030-906 - SANTOS SP

de das condições ambientais e, principalmente para as fêmeas, do desenvolvimento gonodal, em algumas espécies.

A alometria referencial pode ser definida, também, para o volume (V_t) total dos indivíduos, pois:

$$V_t = L^3 = (\gamma\, l^v)^3 = \gamma^3\, (l^3)^v$$

onde: l^3 = volume referencial.

Se L e L' forem a mesma medida tomada nos dois lados de animais com simetria bilateral, a razão *v/v'* mede a "assimetria bilateral morfológica", usada em genética.

A determinação da expressão matemática para o crescimento orgânico parte de (BERTALANFFY, 1938 e 1957):

$$\frac{dW}{dt} = aW^m - cW^n \qquad \text{(IV)}$$

onde: t = idade e

parâmetros metabólicos:

a e m para o anabolismo e

c e n para o catabolismo.

De (I) tem-se:

$$dW = 3\delta l^2\ dl$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{a}{3}\ \delta^{m-1}\ l^{3m-2} - \frac{c}{3}\ \delta^{n-1}\ l^{3n-2} \qquad \text{(V)}$$

com assíntota: $l_\infty = \left(\frac{a}{c}\right)^{\eta} \delta^{-1/3}$ obtida de $\frac{dl}{dt} = 0$ e

inflexão: $l_a = \left(\frac{3m-2}{3n-2}\right)^{\eta} l_\infty$ obtida de $\frac{d^2 l}{dt^2} = 0$

onde: $\eta = \dfrac{1}{3\,(n-m)}$

Esta equação diferencial só tem solução analítica para alguns valores de m e n.

Para n = 1:

$$l = l_\infty\ [1 - e^{-k(t+t_0)}]^{\eta} \qquad k = c\,(1 - m)$$

Para m = 1:

$$l = l_\infty\,[1 + e^{-k(t+t_0)}]^{-\eta} \qquad k = a\,(n - 1)$$

Primeira expressão geral (m < 1):

$$l = \left(\frac{a}{c}\right)^{\eta} \delta^{-1/3} \left\{1 - e^{-[a\,(n-1) + c\,(1-m)]\,(t+t_0)}\right\}^{\eta}$$

Para $m = \frac{2}{3}$ e n = 1 (BERTALANFFY, 1957):

$$l = l_\infty\,[1 - e^{-k(t+t_0)}] \qquad l_\infty = \frac{a}{c}\ \delta^{-1/3} \qquad k = \frac{c}{3}$$

Para $n - m = \frac{1}{3}$ ($\eta = 1$) (von Bertalanffy generalizada)

$$l = \frac{a}{c}\ \delta^{-1/3}\ \left\{1 - e^{-[(a-c)(n-1) + c/3]\,(t+t_0)}\right\}$$

Segunda expressão geral (m ≥ 1):

$$l = \left(\frac{a}{c}\right)^{\eta} \delta^{-1/3}\ \left\{1 + e^{-[a(n-1) + c\,(1-m)]\,(t+t_0)}\right\}^{-\eta}$$

Para

m = 1 e $n = \frac{4}{3}$ (logística) (RICHARDS, 1969):

$$l = l_\infty\,[1 + e^{-k(t+t_0)}]^{-1} \qquad l_\infty = \frac{a}{c}\,\delta^{-1/3} \qquad K = \frac{a}{3}$$

Para $n - m = \frac{1}{3}$ ($\eta = 1$) (*l*ogística generalizada)

$$l = \frac{a}{c}\,\delta^{-1/3}\left\{1 + e^{-[(c-a)\,(1-m) + a/3]\,(t+t_0)}\right\}^{-\eta}$$

De (I) e (II) resulta:

$$L = L_\infty[1 - e^{-k(t+t_0)}]^{\eta v} \qquad W = W_\infty[1 - e^{-k(t+t_0)}]^{\eta 3}$$

$$L = L_\infty[1 - e^{-k(t+t_0)}]^{v} \qquad W = W_\infty[1 - e^{-k(t+t_0)}]^{3}$$

$$L = L_\infty[1 + e^{-k(t+t_0)}]^{-\eta v} \qquad W = W_\infty[1 + e^{-k(t+t_0)}]^{-\eta 3}$$

$$L = L_\infty[1 + e^{-k(t+t_0)}]^{-v} \qquad W = W_\infty[1 + e^{-k(t+t_0)}]^{-3}$$

Em todos os casos (crescimento relativo):

$$L' = \alpha\, L^{\beta} \qquad \text{com: } \alpha = L'_\infty\, L_\infty^{-\beta} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{v'}{v}$$

De (II) e (V) resulta:

$$\frac{dL^{1/v}}{dt} = \frac{a}{3}\delta^{m-1}\,\gamma^{3(1-m)/v}\,L^{(3m-2)/v} - \frac{c}{3}\delta^{n-1}\,\gamma^{3\,(1-n)/v}\,L^{(3n-2)/v}$$

da qual [ou de (IV)] e a derivação numérica (DORN & McCRACKEN, 1981):

$$\frac{dL^{1/v}}{dt} = \frac{\Delta t_1^2\, L_{t+\Delta t_2}^{1/v} + (\Delta t_2^2 - \Delta t_1^2)\, L_t^{1/v} - \Delta t_2^2\, L_{t-\Delta t_1}^{1/v}}{\Delta t_1 \Delta t_2\, (\Delta t_1 + \Delta t_2)}$$

(Δt pequeno) pode-se estimar m e n.

3. CONCLUSÕES

Com os conceitos: comprimento referencial (l) e alometria referencial ($L = \gamma l^{v}$) para a medida morfométrica L, foi possível desenvolver expressões matemáticas para a curva de crescimento orgânico e interpretar, de fomra mais precisa, seus parâmetros.

Da relação $L' = \alpha L^{\beta}$ com $\beta = \frac{v'}{v}$ deduz-se que, se $v = v'$, L e L', são medidas equivalentes em relação ao crescimento, pois, mesmo apresentando (isoladamenate) alometria referencial ($v \neq 1$ e $v' \neq 1$), a relação entre elas é isométrica ($\beta = 1$).

Das equações de crescimento, conclui-se que, a curva em comprimento pode apresentar um ponto de inflexão devido a m e n ou à alometria referencial de L ($v \neq 1$).

Cada medida morfométrica fica associada a um grau de alometria (v), em relação ao crescimento orgânico. Se v não for levado em consideração, os parâmetros estimados a partir dessa medida, poderão apresentar um certo erro (desprezível ou não). Por exemplo: o fator de condição (ϕ) estimado através de:

$$\bar{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{W}{L^3}}{n}$$

quando não se tem dados suficientes para estimar por (III), fica função dos valores de L usados, se $v \neq 1$, pois:

$$\phi = \frac{W}{L^3} L^{3(1-1/v)}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERTALANFFY, L. von 1938 A quantitative theory of organic growth. *Human Biology, 10* (2): 181-213.

_______ 1957 Quantitative laws in metabolism and growth. *The Quaterly Review of Biology*, Baltimore, *32*(3): 217-31.

DORN, W.S. & McCRACKEN, D.D. 1981 *Cálculo numérico com estudos de casos em fortran IV*. São Paulo, Ed. Campus & Universidade de São Paulo. 568p.

HUXLEY, J.S. 1972 *Problems of relativ growth*. New York, Dover Publications. 312p.

RICHARDS, F.J. 1969 The quantitative analysis of growth. In: STEWARD, F.C. ed. *Plant physiology*. New York, Academic Press. v.5,p. 435