

SIMETRIA DO AJUSTAMENTO DE CURVAS

[Symmetry of the curves fit]

Edison Pereira dos SANTOS^{1,2}

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um índice para medir a simetria de um ajustamento de curvas.

PALAVRAS-CHAVE: ajustamento de curvas, análise de regressão, relações entre variáveis

ABSTRACT

This paper presents the development of an index to measure the symmetry of a curve fit.

KEY WORDS: curves adjustment, regression analysis, relationship between variables

1. INTRODUÇÃO

O "ajustamento de curvas" (SANTOS, 1978) é a técnica de análise de dados mais usada em Biologia Populacional. Uma de suas etapas consiste em estimar os parâmetros de uma expressão matemática a partir de dados empíricos. Para isso existem vários métodos. O melhor seria o dos "mínimos quadrados", mas que nem sempre leva a estimadores explícitos. Por exemplo, para a expressão: $Y = a e^{-bx}$

resulta:

$$\frac{\sigma \sum_{i=1}^n [Y_i - a e^{-bx_i}]^2}{\sigma a} = 0$$
$$\frac{\sigma \sum_{i=1}^n [Y_i - a e^{-bx_i}]^2}{\sigma b} = 0$$

sistema sem solução analítica. Neste caso é comum usar uma transformação logarítmica:

$$\ln Y = \ln a - bX$$

e estimar **a** e **b** por regressão linear. Entretanto, a curva resultante, dependendo da variabilidade dos pontos, passa deslocada das médias de Y por classe de X.

Este trabalho denomina "assimetria do ajustamento" a esse desvio.

O programa "CAJUS" para microcom-

putadores, desenvolvido pelo autor, apresenta um método "iterativo" que consiste em atribuir, por tentativa, valores ao parâmetro **b**, transformando, por exemplo, a expressão acima em:

$$Y = a Z$$

onde: $Z = e^{-bx}$

estimando o parâmetro **a** por regressão linear pela origem, e escolhendo o valor de **b** que minimiza a variância sobre a curva:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n [Y_i - Y_c]^2}{n - 2}$$

onde: $Y_c = f(X_i)$ e

n = número de pontos empíricos.

Neste caso a curva resultante é mais simétrica em relação aos pontos. O programa ajusta, também, pelas modas das distribuições de frequência de Y por classe de X.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um índice que meça essa simetria (ou assimetria). Ele pode ser usado, também para medir a simetria de distribuições de frequência de uma só variável.

Neste trabalho, todos os ajustamentos foram feitos com o "CAJUS (C de Curva + AJUS de Ajustamento)".

(1) Bolsista do CNPq junto à Divisão de Pesca Marítima - Instituto de Pesca - CPA/SAA
(2) Endereço/Address: Av. Bartholomeu de Gusmão, 192 - CEP 11030-906 - SANTOS - SP

2. ÍNDICE DE ASSIMETRIA

De forma empírica, fazendo:

$$u = \frac{\sum_{i=1}^n [Y_c - Y_i]}{\sum_{i=1}^n |Y_c - Y_i|}$$

onde: $Y_c = f(X_c)$ e
 n = número de observações,

- tem-se: 1) $-1 \leq u \leq 1$
 2) $u = 0$ para ajustamento simétrico,
 3) $u \neq 0$ para ajustamento assimétrico,
 4) $u > 0$ $Y_c > \bar{Y}$ (média de Y por classe de X)
 5) $u < 0$ $Y_c < \bar{Y}$
 6) $u = 1$ $Y_c \geq Y_i$
 7) $u = -1$ $Y_c \leq Y_i$

Como o valor absoluto de u aumenta com a assimetria, ele recebe o nome de "índice de assimetria".

Ele pode ser calculado em cada classe de X, e lançado em gráfico em função de X. Se a tendência dos pontos resultante for paralela à abscissa, significa que há boa aderência entre a expressão matemática escolhida e os pontos empíricos.

Na distribuição de freqüência de uma variável (X), esse índice, agora representado por:

$$u = \frac{\sum_{i=1}^n [\bar{X} - X_i]}{\sum_{i=1}^n |\bar{X} - X_i|}$$

onde: \bar{X} = medida de posição da distribuição (média, moda, etc) mede a assimetria da distribuição, em relação a \bar{X} (SPIEGEL, 1971). Resultando, de forma idêntica, $u = 0$ para \bar{X} = média, etc.

AS FIGURAS 1 a 4 apresentam dados simulados para exemplificar a utilização de u .

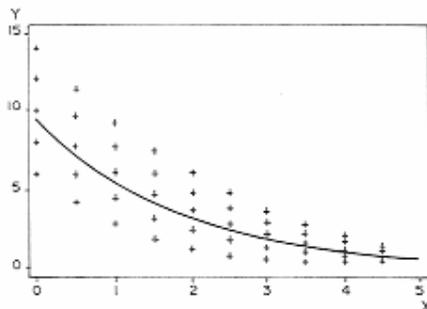


FIGURA 1 - Ajustamento pela transformação logarítmica: $u = -0,267$ e $\sigma^2 = 3,39$

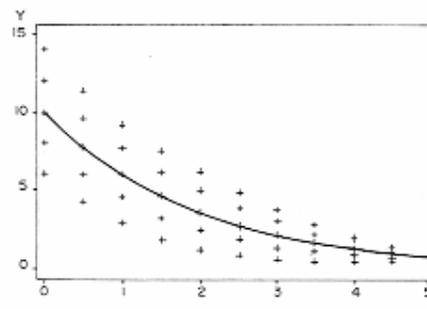


FIGURA 2 - Ajustamento por iteração: $u = -0,00237$ e $\sigma^2 = 3,21$

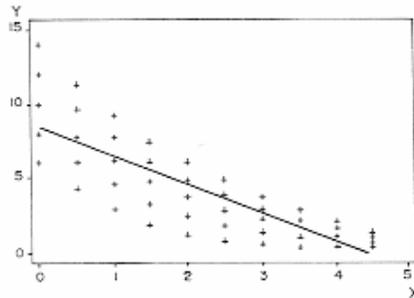


FIGURA 3 - Ajustamento de uma reta simulando uma escolha ruim da função

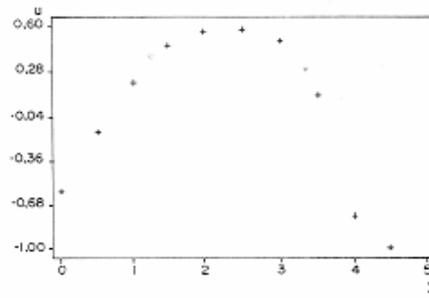


FIGURA 4 - Valores de u por classe de X obtidos da FIGURA 3. A tendência não paralela à abscissa indica que a reta não é uma função adequada, no caso

3. CONCLUSÕES

Este trabalho define o termo "simetria do ajustamento" e desenvolve um índice para medir essa simetria. Ele foi denominado "índice de assimetria (u)" porque o seu valor absoluto aumenta com a assimetria, e apresenta as seguintes propriedades:

- 1) varia em valor absoluto de 0 a 1,
- 2) será positivo se, em cada classe X, $Y_c \geq \bar{Y}$, e negativo se $Y_c \leq \bar{Y}$,
- 3) será igual a 1 se, em cada classe, $Y_c \geq Y_p$, e -1, se $Y_c \leq Y_p$.

Ele é importante na escolha da função de ajustamento, e do método de estimação dos parâmetros dessa função. Por exemplo:

- 1) na FIGURA 1 observa-se $Y_c \leq \bar{Y}$ (pontos médios) e $u = -0,267$
- 2) na FIGURA 2, $Y_c \cong \bar{Y}$ com $u = -0,00237$ enquanto que σ^2 foi pouco discriminante, variou de 3,39 a 3,21.

A FIGURA 4, com os valores de u por classe de X (não paralelos à abscissa) calculados com os dados apresentados na FIGURA 3, mostra a assimetria do ajustamento feito.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SANTOS, E. P. dos 1978 *Dinâmica de populações aplicada à pesca e piscicultura*. São Paulo, HUCITEC-EDUSP, 129 p.

SPIEGEL, M.R. 1971 *Estatística*. McGraw-Hill do Brasil, 580p.